Osnovi računarstva I

Bulova algebra

- **Bulova algebra** – Oblast koja tretira logičke iskaze i promjenljive koji imaju samo jednu od 2 moguće vrijednosti: ”tačan” i ”netačan” (ili 0 i 1)
- Binarne cifre mogu se posmatrati kao članovi skupa {0,1}
- Promjenljive koje mogu uzimati samo jednu od ove dvije vrijednosti uobičajeno se označavaju velikim slovima A, B, C,…, X, Y, Z
- Dvočlana Bulova algebra definiše se kao uređena šestorka (**B**,·,+,¯,0,1)
- **B=**{0,1}
- Aksiomi Bulove algebre:

1. $A \cdot B = B \cdot A$ i $A+B=B+A$
2. $A \cdot (B+C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$ i $A + (B \cdot C) = (A+B) \cdot (A+C)$
3. $A \cdot 1 = A$ i $A + 0 = A$
4. $A \cdot \overline{A} = 0$ i $A + \overline{A} = 1$
5. $0 \neq 1.$

Napomena: Operacija logičkog množenja ima veću važnost od operacije logičkog sabiranja. Na primjer, u aksiomu 2 izraz $A+(B\cdot C)$ identičan je izrazu $A+B\cdot C$

- Na osnovu navedenih aksioma možemo dokazati neke važne zakone:
  - ***Prvi zakon ograničenosti***: U Bulovoj algebri važi: $A+1=1$

    Dokaz: Pođimo od desne strane jednakosti.

    Iz aksioma 4 slijedi da je $1=A+\overline{A}$, a na osnovu aksioma 3: $\overline{A}=\overline{A}\cdot 1$.

    Kombinovanjem ovih aksioma: $1=A+\overline{A}\cdot 1$.

    Primjenom aksioma 2 u obliku $A+(B\cdot C)=(A+B)\cdot(A+C)$, đe je B $\rightarrow$ $\overline{A}$ i C $\rightarrow$ 1, dobija se $1=(A+\overline{A})\cdot(A+1)$.

    Primjenom aksioma 4 u obliku $A+\overline{A}=1$: $1=1\cdot(A+1)$.

    Primjenom aksioma 3 u obliku $A\cdot 1=A$: $1=A+1$.
  - ***Drugi zakon ograničenosti***: U Bulovoj algebri važi: $A\cdot 0=0$
  - ***Zakoni idempotentnosti***: $A+A=A$ i $A\cdot A=A$

- Definicije logičkih operacija sabiranja (+) i množenja (·), kao i unarne operacije komplementiranja (‾) za slučaj dvočlane Bulove algebre:

Sabiranje (+)	Množenje (·)	Komplementiranje
logičko ILI ($\vee$)	logičko I ($\wedge$)	logičko NE
$0+0=0$	$0\cdot 0=0$	$\overline{0}=1$
$0+1=1$	$0\cdot 1=0$	$\overline{1}=0$
$1+0=1$	$1\cdot 0=0$	
$1+1=1$	$1\cdot 1=1$	

- Definicije gornjih operacija slijede iz aksioma i zakona. Na primjer:
  - Iz aksioma 3 ($A+0=A$) slijede izrazi: $0+0=0$ i $1+0=1$
  - Iz aksioma 1 (aksiom komutativnosti): $0+1=1+0=1$
  - Iz zakona idempotentnosti ($A+A=A$): $1+1=1$

- Radi lakšeg rada “sumiramo” *pravila* Bulove algebre
  - Pravilo sa konstantnim vrijednostima:

$$A + 0 = A$$
$$A + 1 = 1$$
$$A \cdot 0 = 0$$
$$A \cdot 1 = A$$

  - Pravilo sa ponovljenim vrijednostima:

$$A + A = A$$
$$A \cdot A = A$$

  - Pravilo sa komplementarnim vrijednostima:

$$A + \overline{A} = 1$$
$$A \cdot \overline{A} = 0$$

  - Pravilo sa dvostruko komplementiranim vrijednostima:

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

- DE MORGANOVA TEOREMA

$$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$$

A	B	A+B	$\overline{A+B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}\cdot\overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

$$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$$

A	B	A·B	$\overline{A\cdot B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}+\overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

DE MORGANOVA TEOREMA ZA VIŠE PROMJENLJIVIH

- $\overline{A + B + C} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C},$
  - Dokaz: $\overline{A + B + C} = \overline{A + (B + C)} = \overline{A} \cdot \overline{B + C} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C},$
- $\overline{A \cdot B \cdot C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}.$
  - Dokaz: $\overline{A \cdot B \cdot C} = \overline{A \cdot (B \cdot C)} = \overline{A} + \overline{B \cdot C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}.$
- Analogno:

$$\overline{X_1 + X_2 + \ldots + X_N} = \overline{X}_1 \cdot \overline{X}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{X}_N,$$

$$\overline{X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_N} = \overline{X}_1 + \overline{X}_2 + \ldots + \overline{X}_N.$$

- Primjer identiteta $(A+B)\cdot(A+\overline{B})=A$

  - Dokaz:

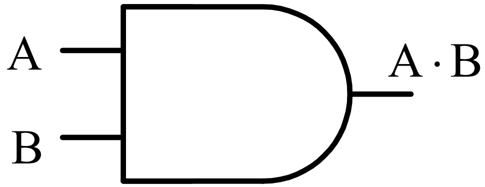
$$
\begin{aligned}
&(A+B)\cdot(A+\overline{B}) \\
&=A\cdot A+A\cdot\overline{B}+A\cdot B+B\cdot\overline{B} && \text{2-struka primjena aksioma 2} \\
&=A+A\cdot(\overline{B}+B) && \text{pravilo pon. vr., aks. 2, pravilo komp. vr.} \\
&=A+A && \text{pravilo kom. vrij. i pravilo konst. vr.} \\
&=A && \text{pravilo pon. vr.}
\end{aligned}
$$

- Primjer identiteta $(A+B)\cdot(\overline{A}+C)=\overline{A}\cdot B+A\cdot C$

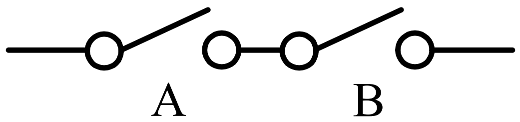
  - Dokaz:

$$
\begin{aligned}
& (A+B)\cdot(\overline{A}+C) \\
&= A\cdot\overline{A}+A\cdot C+\overline{A}\cdot B+B\cdot C \\
&= A\cdot C\cdot(B+\overline{B})+\overline{A}\cdot B\cdot(C+\overline{C})+B\cdot C\cdot(A+\overline{A}) \\
&= A\cdot B\cdot C+A\cdot\overline{B}\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+A\cdot B\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot C \\
&= A\cdot B\cdot C+A\cdot\overline{B}\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C} \\
&= A\cdot C\cdot(B+\overline{B})+\overline{A}\cdot B\cdot(C+\overline{C}) \\
&= \overline{A}\cdot B+A\cdot C
\end{aligned}
$$

■ LOGIČKO I (AND) KOLO



(*a*)

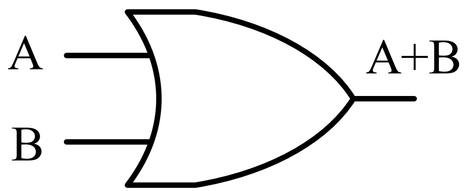


(*b*)

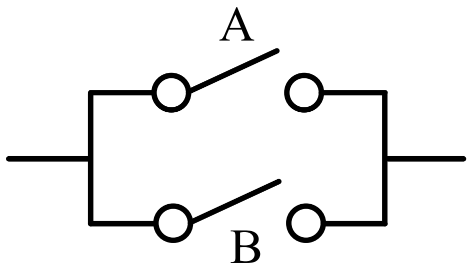
A	**B**	**A · B**
0	**0**	**0**
0	**1**	**0**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

(*c*)

■ LOGIČKO ILI (OR) KOLO



(*a*)

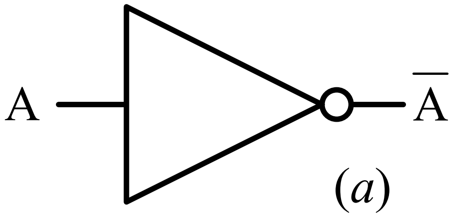


(*b*)

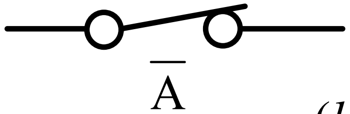
A	**B**	**A+B**
0	**0**	**0**
0	**1**	**1**
1	**0**	**1**
1	**1**	**1**

(*c*)

- LOGIČKO NE KOLO (INVERTOR)



(a)

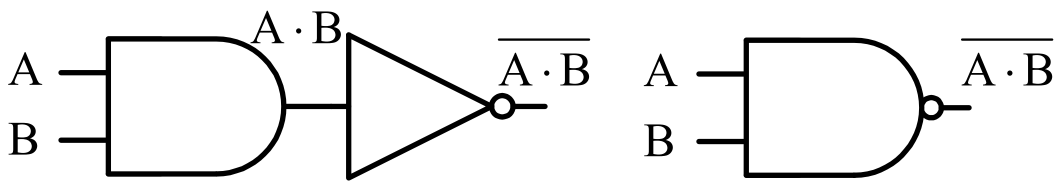


(b)

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

(c)

■ LOGIČKO NI (NAND) KOLO

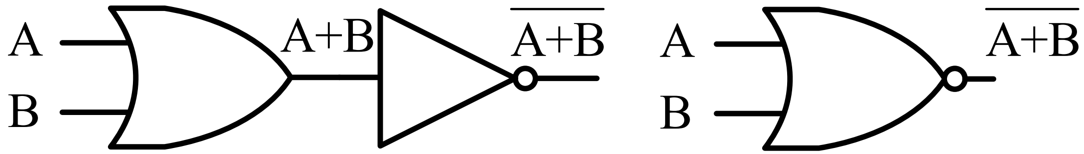


(*a*) (*b*)

A	**B**	$\overline{\mathbf{A \cdot B}}$
0	**0**	**1**
0	**1**	**1**
1	**0**	**1**
1	**1**	**0**

(*c*)

■ LOGIČKO NILI (NOR)

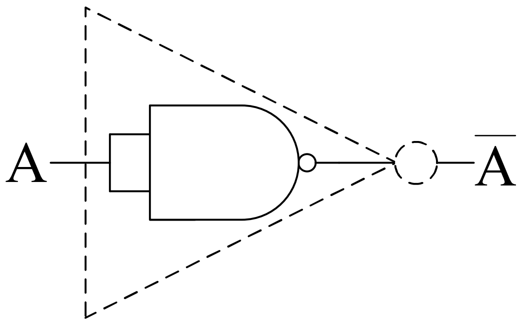


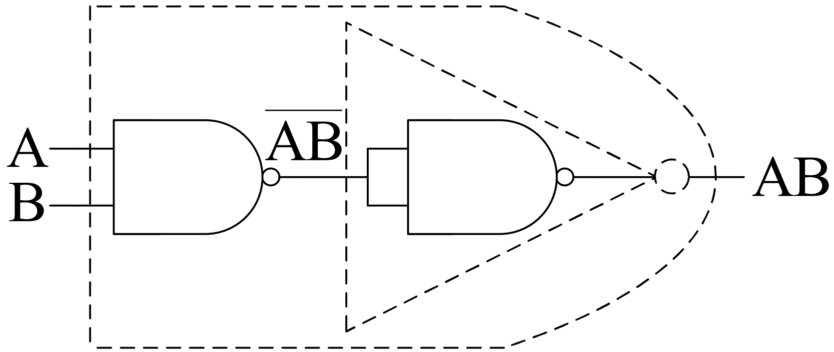
(*a*) (*b*)

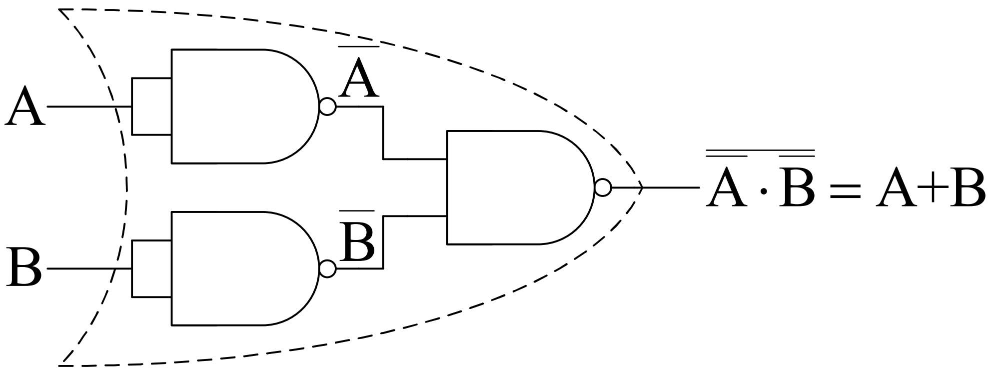
A	**B**	$\overline{\mathbf{A + B}}$
0	**0**	**1**
0	**1**	**0**
1	**0**	**0**
1	**1**	**0**

(*c*)

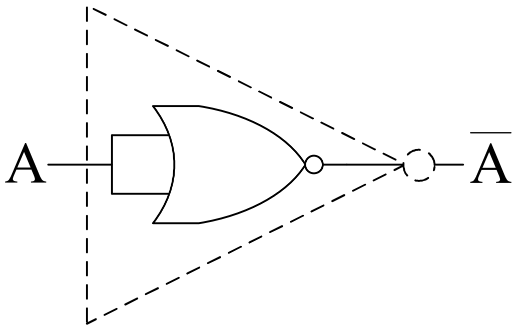
- UPOTREBA NI KOLA

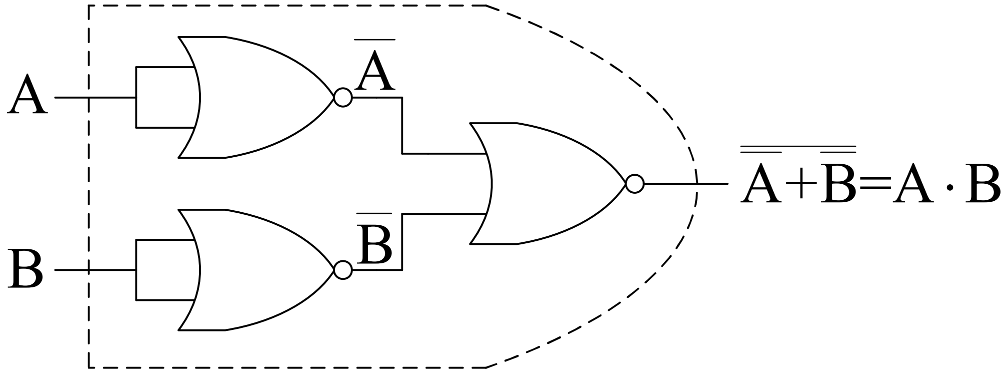


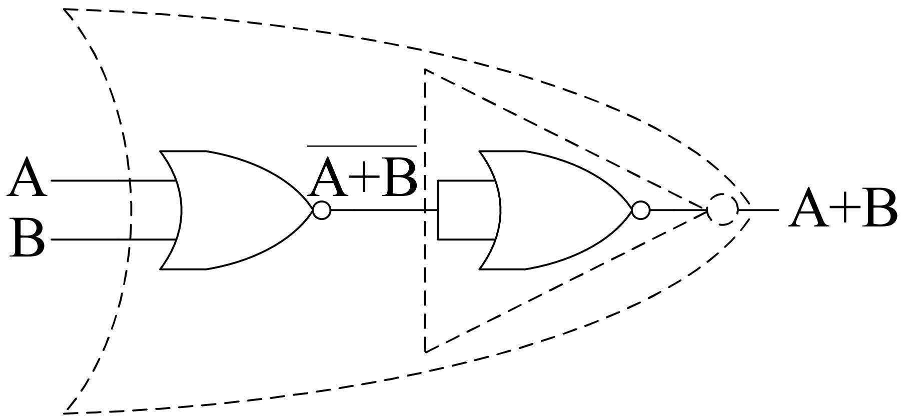




- UPOTREBA NILI KOLA







Osnovi računarstva I

Prekidačke funkcije

- Nezavisno promjenljive i njihove funkcije mogu uzeti samo jednu od dvije moguće vrijednosti iz skupa {0,1}. Samim tim, broj funkcija u dvočlanoj Bulovoj algebri je veoma ograničen.
- Funkcija jedne promjenljive (A)

A	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Prepoznajemo f-je:

$$f_1(\mathrm{A}) = 0$$

$$f_2(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$$

$$f_3(\mathrm{A}) = \overline{\mathrm{A}}$$

$$f_4(\mathrm{A}) = 1$$

- Funkcija dvije promjenljive (A,B):

A	B	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

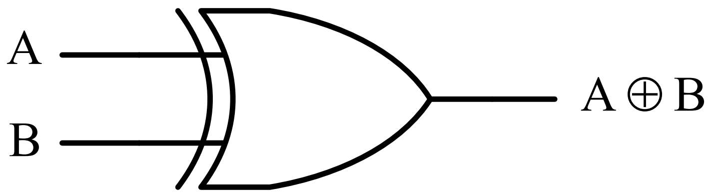
Prepoznajemo f-je: $f_1(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = 0$ $\quad f_2(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \mathrm{A} \cdot \mathrm{B}$

$f_4(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \mathrm{A}$ $\quad f_8(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \mathrm{A} + \mathrm{B}$ $\quad f_{11}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \overline{\mathrm{B}}$

- Uvešćemo i novu funkciju ”EKSKLUZIVNO ILI” (EX-ILI):

$$\mathrm{A} \oplus \mathrm{B} = \mathrm{f}_7(\mathrm{A}, \mathrm{B})$$

- EKSKLUZIVNO ILI (EX-OR) KOLO



(*a*)

A	B	A ⊕ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(*b*)

Osnovi računarstva I

Bulovi izrazi i polinomi

- **Logički proizvod** (u matematičkoj literaturi **elementarna konjunkcija**) je izraz kod koga su različite promjenljive A_i, $i=1,...,k$, sa negacijom ili bez nje, povezane logičkom I operacijom.
  - Na primjer: $\overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, $\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_3$, $\overline{A}_1 \cdot A_2$
- **Logički zbir** (u matematičkoj literaturi **elementarna disjunkcija**) je izraz kod koga su različite promjenljive A_i, $i=1,...,k$, sa negacijom ili bez nje, povezane logičkom ILI operacijom.
  - Na primjer: $\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + A_3$, $A_1 + \overline{A}_3$, $\overline{A}_1 + A_3$
- **Potpuni logički proizvod** ili **minterm** (u matematičkoj literaturi **kanonska ili savršena elementarna konjunkcija**) je izraz povezan logičkom I operacijom, **u kome učestvuju sve promjenljive**, sa negacijom ili bez nje.
- Za datu vrijednost promjenljivih A_1, A_2, …., A_k samo jedan potpuni logički proizvod (minterm) ima vrijednost 1, a svi ostali imaju vrijednost 0.

- Svi mogući mintermovi za funkciju sa 3 promjenljive:

A_1	A_2	A_3	Minterm	Indeks	Oznaka
0	0	0	$\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$	0	m_0
0	0	1	$\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3$	1	m_1
0	1	0	$\bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3$	2	m_2
0	1	1	$\bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3$	3	m_3
1	0	0	$A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$	4	m_4
1	0	1	$A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3$	5	m_5
1	1	0	$A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3$	6	m_6
1	1	1	$A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$	7	m_7

- **Potpuni logički zbir** ili **maksterm** (u matematičkoj literaturi **kanonska ili savršena elementarna disjunkcija**) je izraz povezan logičkom ILI operacijom, **u kome učestvuju sve promjenljive**, sa negacijom ili bez nje.
- Za datu vrijednost promjenljivih A_1, A_2, …., A_k samo jedan maksterm ima vrijednost 0, a svi ostali imaju vrijednost 1. Za funkciju sa 3 promjenljive:

A_1	A_2	A_3	Maksterm	Indeks	Oznaka
0	0	0	$A_1 + A_2 + A_3$	0	M_0
0	0	1	$A_1 + A_2 + \bar{A}_3$	1	M_1
0	1	0	$A_1 + \bar{A}_2 + A_3$	2	M_2
0	1	1	$A_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3$	3	M_3
1	0	0	$\bar{A}_1 + A_2 + A_3$	4	M_4
1	0	1	$\bar{A}_1 + A_2 + \bar{A}_3$	5	M_5
1	1	0	$\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + A_3$	6	M_6
1	1	1	$\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3$	7	M_7

- U opštem slučaju je:

$$\overline{\mathrm{M}_i} = \mathrm{m}_i$$

$$\overline{\mathrm{m}_i} = \mathrm{M}_i$$

- **Zbir logičkih proizvoda (disjunktivna normalna forma)** je izraz kod koga su **logički proizvodi** povezani operacijom logičkog sabiranja
  - Primjer: $f(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3) = (\overline{\mathrm{A}}_1 \cdot \overline{\mathrm{A}}_2) + \overline{\mathrm{A}}_1 + (\overline{\mathrm{A}}_2 \cdot \mathrm{A}_3)$
- **Zbir potpunih logičkih proizvoda (kanonska ili savršena disjunktivna normalna forma)** je izraz kod koga su **potpuni logički proizvodi (mintermovi)** povezani operacijom logičkog sabiranja
  - Primjer: $f(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3) = \overline{\mathrm{A}}_1 \cdot \overline{\mathrm{A}}_2 \cdot \overline{\mathrm{A}}_3 + \overline{\mathrm{A}}_1 \cdot \overline{\mathrm{A}}_2 \cdot \mathrm{A}_3 + \mathrm{A}_1 \cdot \overline{\mathrm{A}}_2 \cdot \mathrm{A}_3$
  - Ova funkcija može se zapisati i kao:

$$f(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3) = \mathrm{m}_0 + \mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_5 = \sum_{i=0,1,5} \mathrm{m}(i) = \sum \mathrm{m}(0,1,5).$$

- **Proizvod logičkih zbirova (konjunktivna normalna forma)** je izraz kod koga su **logički zbirovi** povezani operacijom logičkog množenja.
  - Primjer: $f(A_1, A_2, A_3) = (\overline{A}_1 + \overline{A}_3) \cdot (\overline{A}_2 + A_3) \cdot A_1$
- **Proizvod potpunih logičkih zbirova (kanonska ili savršena konjunktivna normalna forma)** je izraz kod koga su **potpuni logički zbirovi (makstermovi)** povezani operacijom logičkog množenja.
  - Primjer: $f(A_1, A_2, A_3) = (\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3) \cdot (\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + A_3) \cdot (A_1 + \overline{A}_2 + A_3)$
  - Ova funkcija može se zapisati i kao:

$$f(A_1, A_2, A_3) = M_7 \cdot M_6 \cdot M_2 = \prod_{i=2,6,7} M(i) = \prod M(2,6,7)$$

- ***Primjer:*** Odrediti prekidačku funkciju sa tri logičke promjenljive, X, Y, Z, definisanu tabelom:

i	X	Y	Z	$F(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})$
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

- U obliku zbira potpunih logičkih proizvoda (mintermova):

$$F(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}) = \sum \mathrm{m}(0,3,5) = \overline{\mathrm{X}}\cdot\overline{\mathrm{Y}}\cdot\overline{\mathrm{Z}} + \overline{\mathrm{X}}\cdot\mathrm{Y}\cdot\mathrm{Z} + \mathrm{X}\cdot\overline{\mathrm{Y}}\cdot\mathrm{Z}$$

- U obliku proizvoda potpunih logičkih zbirova (makstermova):

$$F(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}) = \prod \mathrm{M}(1,2,4,6,7) =$$

$$= (\mathrm{X}+\mathrm{Y}+\overline{\mathrm{Z}})(\mathrm{X}+\overline{\mathrm{Y}}+\mathrm{Z})(\overline{\mathrm{X}}+\mathrm{Y}+\mathrm{Z})(\overline{\mathrm{X}}+\overline{\mathrm{Y}}+\mathrm{Z})(\overline{\mathrm{X}}+\overline{\mathrm{Y}}+\overline{\mathrm{Z}})$$